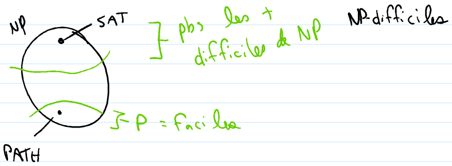
Problèmes NP-complets

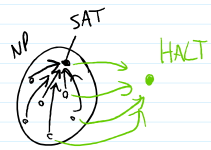
4 février 2022 11:05



- Pour définir NP-difficile, on utilise une réduction polynomiale $\leq_p$
- Soit A, B deux langages. On dit $A \leq_p B$ s'il existe une fct $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ telle que $w \in A \iff f(w) \in B$ et f est calculable en temps polynomial.

<u>Déf</u>: un langage L est NP-difficile si:
$\forall L' \in NP$, on a $L' \leq_p L$.

De plus, si $L \in NP$, alors L est NP-complet.



<u>Thm</u>: s'il existe une MT en temps poly pour un L NP-difficile, alors $\forall L' \in NP$, on a $L' \in P$.

Si $L \in P$, alors tout $L' \in NP$ est dans P.

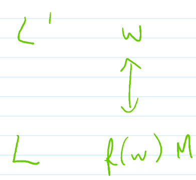
- Supposons qu'un L NP-difficile est dans P. Donc, $\exists$ MT M pour décider L en temps $O(n^k)$.

Soit $L' \in NP$. On sait $L' \leq_p L$, et donc $\exists f$ calculable en $O(n^{k'})$ telle que

$$w \in L' \iff f(w) \in L.$$

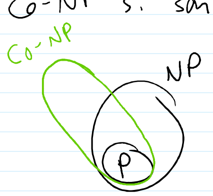
Pour décider L', on construit la MT:

sur entrée w: $(w \in L'\ ?)$
- $O(n^{k'})$ calculer $f(w)$
- $O(n^k)$ Passer $f(w)$ à M
- $O(1)$ accepter ssi M a accepté



<u>co-NP</u>

Un langage L est dans co-NP si son complément $\bar{L}$ est dans NP.
$(\bar{L} = \{w : w \notin L\})$

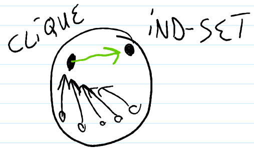


ex: UNSAT $= \{\varphi : \varphi$ est une formule bool. non-satisfaisable$\}$

$\overline{UNSAT} = SAT$ Puisque $SAT \in NP$, alors $UNSAT \in co\text{-}NP$.

$\text{IND-SET} = \{\langle G,k\rangle : G \text{ a un ensemble indep. de taille } k\}$
est NP-complet.

Pour prouver que IND-SET est NP-difficile, on va utiliser un autre langage NP-difficile et le réduire à IND-SET.



Thm: CLIQUE est NP-difficile. (boîte noire)

On veut montrer que $\text{CLIQUE} \leq_p \text{IND-SET}$

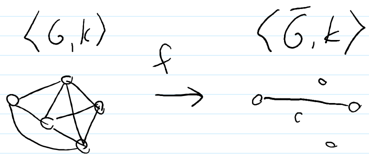
On veut trouver f t.q. $\langle G,k\rangle \in \text{CLIQUE} \iff f(\langle G,k\rangle) \in \text{IND-SET}$

Soit $\langle G,k\rangle$ une instance de CLIQUE.

On définit $f(\langle G,k\rangle)$ comme $\langle \bar{G},k\rangle$, où

$\bar{G}$ est le complément de G, c'est-à-dire $V(\bar{G}) = V(G)$

$E(\bar{G}) = \{uv : uv \notin E(G)\}$.



Il est facile de voir que f est calculable en temps poly.

Il faut montrer que G a une clique de taille k
$\iff$ $\bar{G}$ a un ens. indep. de taille k

$\Rightarrow$ Supposons que G a une clique de taille k. Soit C une telle clique. On voit C est un ens. indep. de $\bar{G}$ car il n'y aura aucune arête entre les sommets de C dans $\bar{G}$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\bar{G}$ a un ens. indep. de taille k. Soit C un tel ens. indép.. Alors C est une clique de taille k dans G. ∎

Recette générale pour montrer qu'un langage L est NP-complet.

① $L \in NP$. Souvent trivial avec certificat.

② L est NP-difficile. Trouver un langage NP-difficile A.
Réduire A à L (montrer que $A \leq_p L$)

2.1 · Décrire la transformation f de A à L.
2.2 · Montrer $w \in A \Rightarrow f(w) \in L$
2.3 · Montrer $f(w) \in L \Rightarrow w \in A$

Thm: CLIQUE est NP-complet. $\quad$ CLIQUE $= \{ \langle G, k \rangle : G$ a une clique de taille $k \}$

Pour le prouver, on va utiliser une réduction via 3-SAT.

3-SAT $= \{ \varphi : \varphi$ est une formule booléene en 3-$\underbrace{\text{CNF}}_{\text{conjunctive normal form}}$ satisfaisable $\}$

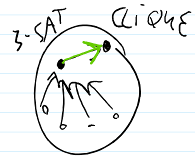
CNF: φ est un ensemble de clauses liées par des $\wedge$

clause: variables liées par des $\vee$

$$\underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)}_{\substack{\text{clauses} \\ C_1}} \wedge \underbrace{(\bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)}_{\substack{\text{clause} \\ C_2}} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)}_{\substack{\text{clause} \\ C_3}}$$

3-CNF: chaque clause a 3 variables.

$\boxed{\text{Thm: 3-SAT est NP-complet. (boîte noire)}}$



① CLIQUE $\in$ NP, car une clique C de taille k peut servir de certificat.

② Réduction via 3-SAT.

$$\varphi \xrightarrow{f} \langle G, k \rangle \quad \text{t.q.} \quad \varphi \in \text{3-SAT} \Leftrightarrow G \text{ a une clique } |C| = k$$

Soit φ une instance de 3-SAT.

Soient $x_1, \dots, x_n$ les variables de φ.

Soient $C_1, \dots, C_m$ les clauses de φ.

2.1 • On pose $k = m$. (# de clauses)

Pour construire G, pour chaque clause $C_i = (a_i \vee b_i \vee d_i)$

on ajoute à G les 3 sommets a_i, b_i, d_i.

Donc G a $3m$ sommets.

Pour les arêtes, on ajoute une arête entre y_i et z_j si

y_i et z_j proviennent de clauses différentes et y_i n'est pas la négation de z_j.

x_i —— $\bar{x}_j$ $\qquad$ x_i -×- $\bar{x}_i$

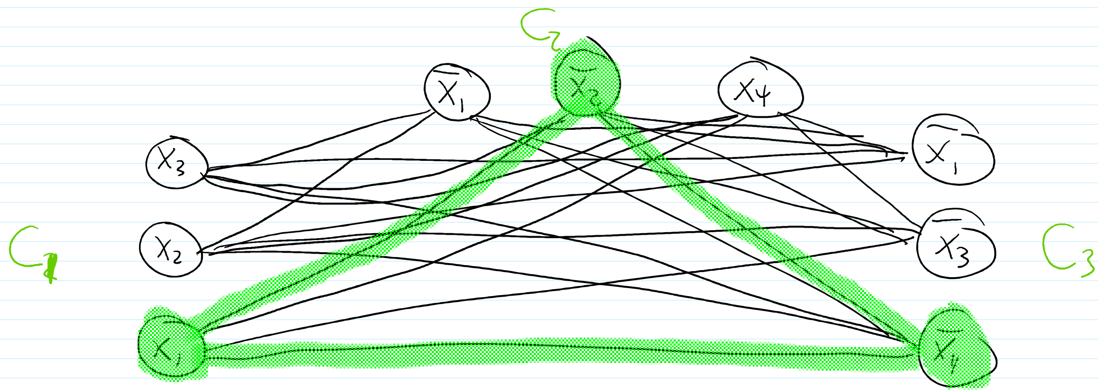
$$\varphi = \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)}_{C_2} \wedge \underbrace{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)}_{C_3}$$

$x = T \qquad x = F \qquad x = F$

C_1 C_2 C_3

$x_1 = T$ $x_2 = F$ $x_4 = F$

$G, k = 3$



Il est facile de construire $\langle G, k \rangle$ à partir de φ en temps $O(m^2)$

On montre $\varphi \in$ 3-SAT $\Longleftrightarrow \langle G, k \rangle \in$ CLIQUE

$\Rightarrow$ Supposons que $\varphi \in$ 3-SAT.
Donc $\exists$ assignation des x_i qui satisfait chaque clause.
Pour chaque C_i, soit y_i une variable de l'assignation qui sat. C_i.
Notre clique est $K = \{ y_i : C_i \text{ est une clause de } \varphi \}$.

- Puisqu'il y a m clauses, $|K| = m = k$.
- Puisque l'assignation ne met pas une variable à T et F en même temps, les sommets de K ne sont pas la négation l'un de l'autre et donc K est une clique.

$\Leftarrow$ Supposons $\langle G, k \rangle \in$ CLIQUE. Soit K une clique de G, $|K| = k = m$.
Alors K doit contenir exactement 1 sommet par triplet représentant une clause.
De plus, les sommets de K correspondent à des valeurs des x_i qui satisfont chaque clause. Ces valeurs correspondent à une assignation possible de φ sans contradiction ($x_i = T$, $\bar{x}_i = F$) et donc φ est satisfaisable. ∎

k-CLIQUE $= \{ G : G \text{ a une clique de taille } k \}$

k-CLIQUE $\in P$.