GG est PSPACE-complet

17 mars 2022 18:53

Thm : GG est PSPACE-complet

1) GG $\in$ PSPACE. Faire comme TQBF...

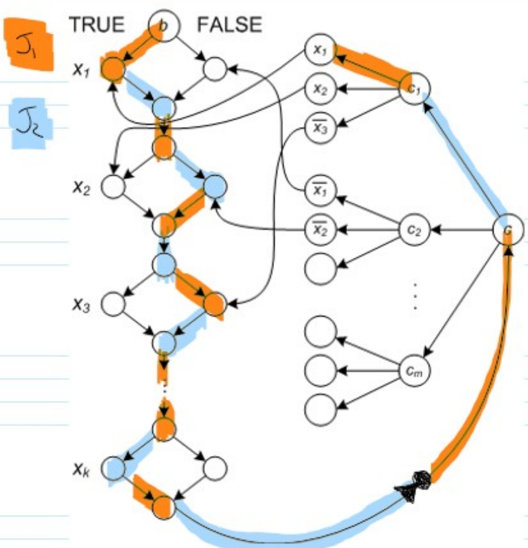
2) GG est PSPACE-difficile

On montre que TQBF $\leq_p$ GG

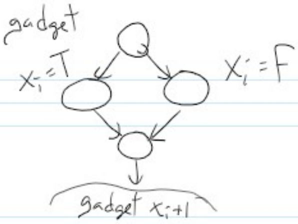
Sur instance $\varphi$ de TQBF, où

$\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \cdots \exists x_{n-1} \forall x_n \, (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m)$ où $C_i$ = clauses

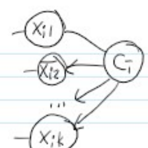
on construit $\langle G, s \rangle$ comme suit : ($b$ = départ)




Pour chaque $x_i$, on a un gadget

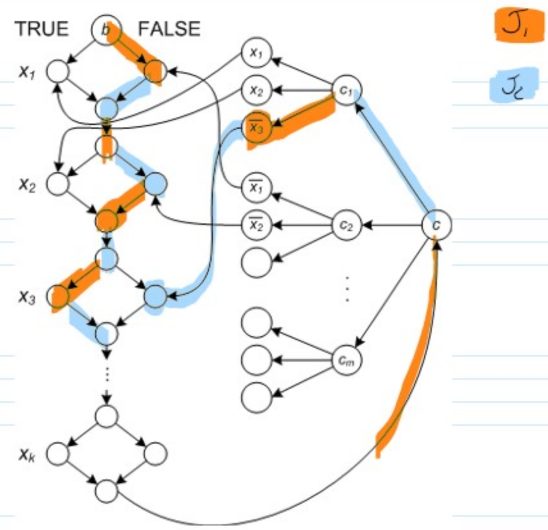



Chaque $C_i$ a un gadget



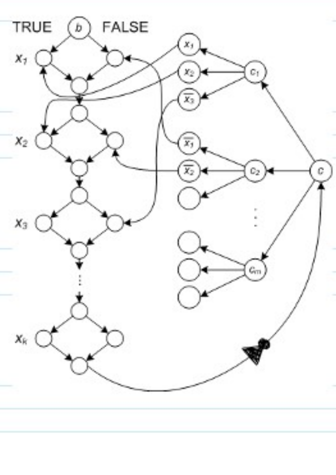

où les $x_{ij}$ et $\overline{x_{ij}}$ sont les litéraux de $C_i$. Chaque litéral $x_j$ a un lien vers $x_j = V$ et $\overline{x_j}$ a un lien vers $x_j = F$

On connecte le tout comme sur la figure




$\varphi$ est vraie $\Rightarrow$ J1 gagne toujours

- Supposons que la formule $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots \forall x_n \, \psi$ vraie.
- Dans GG, J1 choisit le sommet $x_1$ ou $\overline{x_1}$ qui garantit de satisfaire $\forall x_2 \exists x_3 \ldots \psi$.
- Ensuite, J2 doit choisir un sommet $x_2$ ou $\overline{x_2}$.
- Une fois ce choix fait, J3 choisit le $x_3$ ou $\overline{x_3}$ qui garantit de satisfaire $\forall x_4 \exists x_5 \ldots \psi$ (selon $x_1$ et $x_2$).
- Et ainsi de suite...
- Une fois tous les $x_i$ choisis, $\psi$ est satisfaite.
- Sur G, J1 se rend au sommet c. J2 choisit d'aller à un noeud $C_i$. Puisque la clause $C_i$ est satisfaite, J1 peut choisir un $x_j$ ou $\overline{x_j}$ dans $C_j$ qui a été assigné. Au tour de J2, impossible de prolonger vers l'autre $x_j$ ou $\overline{x_j}$.



J1 gagne $\Rightarrow$ $\varphi$ est vraie

- Par contraposée, i.e. $\varphi$ est fausse $\Rightarrow$ J1 perd

Si $\varphi$ est fausse, alors on sait que

$\neg(\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots \forall x_n\ \psi) \equiv \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \dots \exists x_n \neg\psi$

- Donc peu importe si J1 va sur le sommet $x_1$ ou $\bar{x}_1$, J2 choisit $x_2$ qui garantit que $\forall x_3 \exists x_4 \dots \exists x_n \neg\psi$.

Et ainsi de suite...

- Une fois les choix faits, les $x_i$ choisis font que $\neg\psi$, i.e. $\psi$ n'est pas satisfaite
i.e. une clause $C_i$ de $\psi$ n'est pas satisfaite.

- Quand J1 arrive à $C$, J2 choisit d'aller à $C_i$.
Aucun des $x_j$ ou $\bar{x}_j$ dans $C_i$ n'a été choisi (car $C_i$ n'est pas sat.).

Donc peu importe où J1 va, disons à $x_j$, le sommet de gauche $x_j$ est libre.
J2 y va et J1 est bloqué. ∎