IFT503/711 – Théorie du calcul

Université de Sherbrooke

Devoir 5

Enseignant:	Manuel Lafond
Date de remise:	vendredi 5 avril avant 23h59
À réaliser:	individuellement ou à deux au 1er cycle individuellement aux cycles supérieurs
Modalités:	à remettre électroniquement via turnin
Pointage:	sur 40 points au 1er cycle (+ 5pts bonus) sur 50 points aux cycles supérieurs

Question 1.
Commencez par quelques petites questions d'échauffement. Vous pouvez utiliser sans preuve tous les résultats vus en classe.

(a) Rappelons que $\mathsf{EXPTIME} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} DTIME(2^{n^k})$. Montrez que $\mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{EXPTIME}$. 3 pts

(b) Montrez que le langage MAJSAT du devoir 3 est dans PSPACE. 3 pts

(c) Montrez que si $\mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{P}$, alors $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$. 3 pts

(d) On définit $\mathsf{coNPSPACE} = \{L : \overline{L} \in \mathsf{NPSPACE}\}$. Montrez que $\mathsf{coNPSPACE} = \mathsf{NPSPACE}$. 3 pts

Question 2.

(a) La taille $|\phi|$ d'une formule booléenne ϕ est le nombre de caractères requis pour la décrire. Chaque variable x_i ou $\overline{x}_i$ compte pour un caractère, ainsi que les symboles $\vee, \wedge, ($ et $)$. Par exemple, la formule $\phi = (x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge x_3$ a une taille de $|\phi| = 7$. Deux formules ϕ_1 et ϕ_2 sont *équivalentes* si elles utilisent les mêmes variables $x_1, \ldots, x_n$ et si les deux formules sont satisfaites par exactement le même ensemble d'assignations. Montrez que le langage suivant est dans PSPACE. 7 pts

$$\text{MIN-FORMULA} = \{\phi : \text{ il n'existe pas de formule } \phi' \text{ équivalente à } \phi \text{ telle que } |\phi'| < |\phi|\}$$

(b) Vous devez sortir d'un stationnement chaotique. Chaque voiture est à l'horizontale ou à la verticale et peut avancer ou reculer. Nous sommes à l'horizontale et on veut atteindre une case spécifiée. 7 pts

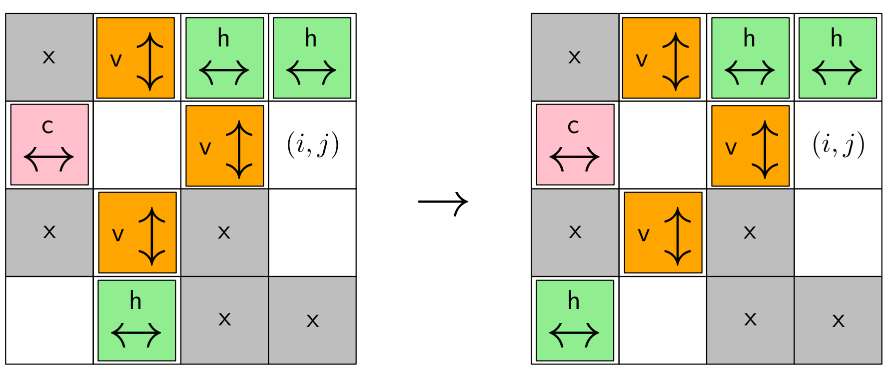

FIGURE 1 – Un exemple de déplacement légal, ici horizontal. Est-ce que c peut aller à la case (i, j)?

Formellement, on a une matrice M de dimension $n \times n$ dans laquelle chaque cellule contient une valeur parmi $\{\mathsf{c}, \mathsf{h}, \mathsf{v}, \mathsf{x}, \llcorner\!\lrcorner\}$. Un déplacement consiste à prendre deux cellules voisines et échanger leur valeur. Plus spécifiquement, un déplacement impliquant deux cellules (i, j) et (i', j') est légal si:

— $M_{i,j} \in \{\mathsf{c}, \mathsf{h}\}$, $M_{i',j'} = \llcorner\!\lrcorner$ et $(i', j') \in \{(i, j-1), (i, j+1)\}$; ou

— $M_{i,j} = \mathsf{v}$, $M_{i',j'} = \llcorner\!\lrcorner$ et $(i', j') \in \{(i-1, j), (i+1, j)\}$.

On écrit $M \to M'$ s'il existe une séquence de déplacements légaux qui transforme M en M'. Le langage correspondant est:

$$\text{GET-OUT} = \{\langle M, i, j\rangle : \text{il existe } M' \text{ telle que } M \to M' \text{ et } M'_{i,j} = \mathsf{c}\}$$

Montrez que GET-OUT est dans PSPACE.

(c) Le problème TQBF présenté en classe supposait une alternance des quantificateurs. En réalité, ce n'est pas exigé. C'est-à-dire, une formule quantifiée peut avoir le même quantificateur plusieurs fois de façon consécutive, par exemple 7 pts

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5 \exists x_6 \ (x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_5) \wedge (x_6 \vee \overline{x}_6)$$

Soit TQBF-GEN l'ensemble des formules booléennes quantifiées qui n'ont pas nécessairement d'alternance entre les quantificateurs, et TQBF qui a cette alternance. Donnez une réduction montrant que TQBF-GEN $\leq_P$ TQBF.

Question 3.

Dans cette question, nous utilisons l'hypothèse ETH (Exponential Time Hypothesis). Rappellons que cette hypothèse stipule que CNF-SAT ne peut pas être décidé en temps $2^{o(n)} poly(n)$, avec n le nombre de variables et où $poly(n)$ représente un polynôme quelconque. 7 pts

Avant la relâche, nous avons vu une réduction f en temps polynomial de CNF-SAT vers SET-COVER. Pour une instance ϕ avec n variables, l'instance transformée $f(\phi) = \langle S, U, k\rangle$ avait la propriété que S contenait $2n$ ensembles (les autres détails de la réduction ne sont pas utiles ici).

Montrez que si la ETH est vraie, alors SET-COVER ne peut pas être décidé en temps $2^{o(m)} poly(m)$, où ici m représente de nombre d'ensembles de l'instance.

★ Question 4. (cycles supérieurs)

Considérez le jeu à deux joueurs suivant, que l'on appellera DOUBLE-GEOGRAPHY. On a en entrée un graphe **orienté** $G = (V, E)$ ainsi que deux sommets distincts v_1 et v_2 de G. On suppose aussi que chaque arête a une couleur, rouge ou bleu. Formellement, ceci s'exprime par une fonction $c : E \to \{rouge, bleu\}$. 10 pts

Le joueur 1 doit construire un chemin orienté bleu P_1 et le joueur deux un chemin orienté P_2 rouge. Initialement, P_1 contient seulement v_1 et P_2 contient seulement v_2. À son tour, le joueur 1 doit prolonger P_1 en ajoutant un sommet à la fin du chemin. Le sommet ajouté doit être un voisin sortant du dernier sommet de P_1 et ne doit pas déjà appartenir à P_1 ni à P_2. De plus, l'arête empruntée pour prolonger le chemin doit être bleue. De la même façon, le joueur 2 à son tour doit prolonger P_2 avec un sommet qui n'est pas déjà dans P_1 ou P_2, en empruntant une arête rouge. Le premier joueur qui est incapable de prolonger son chemin à son tour a perdu.

Le langage DOUBLE-GEOGRAPHY contient les tuples $\langle G, v_1, v_2, c \rangle$ tels que le joueur 1 a une stratégie gagnante sur G lorsque v_1 et v_2 sont les points de départ des joueurs 1 et 2, respectivement, et où c est la fonction de coloriage des arêtes.

Montrez que DOUBLE-GEOGRAPHY est PSPACE-complet.