IFT503/711 – Théorie du calcul

Université de Sherbrooke

Devoir 4

Enseignants:	Michael Blondin
Date de remise:	mardi 26 mars 2024 à 23h59
À réaliser:	individuellement ou à deux au 1er cycle individuellement aux cycles supérieurs
Modalités:	remettre en ligne sur Turnin
Pointage:	sur 40 points au 1er cycle (+ 5pts bonus pour ★) sur 50 points aux cycles supérieurs

Logique.

Question 1.

(a) Rappelons que l'arithmétique de Peano, c.-à-d. $\mathsf{FO}(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$, est indécidable. Considérons une logique similaire où, plutôt que la multiplication de variables « xy », nous avons accès au carré « x^2 » d'une variable. Expliquez formellement pourquoi cette logique, c.-à-d. $\mathsf{FO}(\mathbb{N}, +, \cdot^2, \leq)$, est indécidable. 5 pts

(b) Nous avons vu que l'arithmétique de Presburger, c.-à-d. $\mathsf{FO}(\mathbb{N}, +, \leq)$, est décidable. Expliquez formellement pourquoi cette logique étendue aux entiers, c.-à-d. $\mathsf{FO}(\mathbb{Z}, +, \leq)$, est aussi décidable. 5 pts

Question 2. 10 pts

Soit la formule $\varphi(x, y) \coloneqq (y = 3x + 1)$ de l'arithmétique de Presburger. **Donnez un automate qui reconnaît le langage associé à** φ.

Plus formellement, dénotons par $\text{val}(z)$ la valeur numérique associée au mot $z \in \{0,1\}^*$ dont le bit de poids faible est à gauche. Par exemple, $\text{val}(0010) = 4$ et $\text{val}(1011) = 13$. Dans ce contexte, le mot vide est également valide: $\text{val}(\varepsilon) = 0$.

Le langage associé à φ est

$$L \coloneqq \{(x, y) \in (\{0,1\} \times \{0,1\})^* : \text{val}(y) = 3 \cdot \text{val}(x) + 1\}.$$

Par exemple, le mot $w \coloneqq (0,1)(0,0)(1,1)(0,1)$ appartient à L. En effet, w représente les nombres $\text{val}(0010) = 4$ et $\text{val}(1011) = 13$, et nous avons bien $13 = 3 \cdot 4 + 1$.

Indice: considérez cette reformulation de φ: $\exists a\ (y = a + 1) \wedge (\exists b\ (a = b + x \wedge b = 2x))$ et construisez itérativement l'automate.

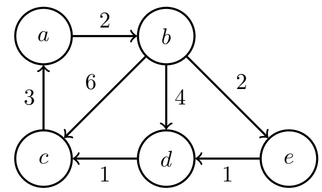
Calcul parallèle.

Question 3.

10 pts

La *distance* d'un sommet s vers un sommet t dans un graphe dirigé pondéré est le coût d'un plus court chemin de s vers t. Par exemple, dans le graphe ci-dessous, la distance de a vers c est de 6.

Montrez que le problème PCC appartient à NC:



PCC

ENTRÉE: un graphe dirigé pondéré $\mathcal{G} = (V, E)$ décrit par une matrice de coûts positifs, deux sommets $s, t \in V$, et un entier positif k sous représentation binaire;

QUESTION: la distance de s vers t dans $\mathcal{G}$ est-elle égale à k?

Il n'est pas nécessaire d'argumenter que votre famille de circuits est uniforme sous espace logarithmique, mais il faut brièvement expliquer pourquoi elle est uniforme sous temps polynomial.

Question 4.

10 pts

Soit X un ensemble fini. Nous disons que $S \subseteq X$ *engendre* $t \in X$ sous une *opération binaire* $\star\colon X \times X \to X$ s'il est possible d'appliquer $\star$ à partir d'éléments de S jusqu'à l'obtention de t. Par exemple, pour l'opération décrite par la table ci-dessous, $S = \{a, c\}$ engendre e car $(a \star a) \star (c \star a) = b \star d = e$.

Montrez que le problème GÉNÉRATION est P-complet:

$\star$	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	b	b	a	a	a
b	b	d	a	e	b
c	d	a	a	a	a
d	c	c	a	d	c
e	c	c	a	d	e

GÉNÉRATION

ENTRÉE: un ensemble fini X, une opération binaire $\star\colon X \times X \to X$ représentée sous forme de table, un sous-ensemble $S \subseteq X$, et un élément $t \in X$;

QUESTION: est-ce que S engendre t sous l'opération $\star$?

Indice: voyez une porte comme deux éléments.

Il n'est pas nécessaire d'expliquer pourquoi votre réduction se calcule en espace logarithmique.

★ Question 5. (cycles supérieurs)

Montrez que REG $\subseteq$ NC^1, où REG est l'ensemble des langages réguliers. ★ 10 pts

Indice: afin de déterminer si un automate accepte un mot w, considérez des sous-mots de w de taille $1, 2, 4, \ldots$