

IFT503/711 – Théorie du calcul  
Université de Sherbrooke

## Devoir 3

Enseignant:	Manuel Lafond
Date de remise:	vendredi 23 février 2024 avant 23h59
À réaliser:	individuellement ou à deux au 1 <sup>er</sup> cycle individuellement aux cycles supérieurs
Modalités:	à remettre via turnin
Pointage:	sur 40 points au 1 <sup>er</sup> cycle (+ 5pts bonus pour ★) sur 50 points aux cycles supérieurs

### Question 1.

Répondez à ces questions d'échauffement.

- (a) Montrez que le langage  $UPREM = \{1^n : n \text{ est un nombre premier}\}$  est dans P. Ici,  $1^n$  dénote le mot avec  $n$  fois le symbole 1, par exemple  $1^5 = 11111$ . 2 pts
- (b) Montrez que le langage  $COMP = \{n : n \text{ encode un nombre non-premier en binaire}\}$  est dans NP. 2 pts
- (c) Montrez que le langage  $PREM = \{n : n \text{ encode un nombre premier en binaire}\}$  est dans co-NP. 2 pts
- (d) Donnez un exemple de langage qui n'est pas dans P. 2 pts

### Question 2.

On écrit  $\langle \phi, n \rangle$  pour dénoter une formule booléenne qui utilise  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ . On dénote par  $\#sat(\phi, n)$  le nombre d'assignations de ces  $n$  variables qui satisfont  $\phi$ .

- (a) Considérez le langage  $UNIQUESAT = \{\langle \phi, n \rangle : \#sat(\phi, n) = 1\}$ . Dites pourquoi l'argument suivant qui prétend que  $UNIQUESAT \in NP$  est erroné. 3 pts  
Soit  $\langle \phi, n \rangle$  une formule à  $n$  variables. En guise de certificat vérifiant que  $\langle \phi, n \rangle \in UNIQUESAT$ , on prend une assignation  $A$  qui satisfait  $\phi$ , ce qui est facile à vérifier en temps polynomial. Il existe donc un vérificateur pour  $UNIQUESAT$ , et le langage est dans NP.
- (b) Montrez que si vous avez un oracle pour  $UNIQUESAT$ , alors vous pouvez décider SAT en temps polynomial. 4 pts  
*Suggestion.* Sur instance  $\phi$  de SAT, demandez à l'oracle une réponse sur  $\phi \vee \phi'$ , où  $\phi'$  est une formule que vous aurez soigneusement préparée.
- (c) Soit le langage  $MAJSAT = \{\langle \phi, n \rangle : \#sat(\phi, n) \geq 2^n/2\}$ , i.e. les formules satisfaites par au moins la moitié des assignations. Dites pourquoi l'argument suivant qui prétend que  $MAJSAT \in NP$  est erroné. 3 pts  
Soit  $\langle \phi, n \rangle$  une formule à  $n$  variables. Soient  $A_1, A_2, \dots, A_k$  la liste des assignations qui satisfont  $\phi$ , qui nous serviront de certificat. Pour chaque  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , on peut vérifier en temps polynomial que  $A_i$  satisfait bel et bien  $\phi$ . Une fois que c'est fait, il suffit de vérifier que  $k \geq 2^n/2$ . Il existe donc un vérificateur pour  $MAJSAT$ , et le langage est dans NP.
- (d) Montrez que  $MAJSAT$  est NP-difficile. 6 pts  
*Indice:* étant donné une formule booléenne  $\phi$  sur variables  $x_1, \dots, x_n$ , considérez

$$(\overline{x_0} \wedge \phi) \vee (x_0 \wedge (x_1 \vee \dots \vee x_n))$$

où  $x_0$  est une nouvelle variable.

**Question 3.**

Montrez que les deux langages décrits ci-bas sont NP-complet.

- (a) Dans le problème du NO-BAD-SUM, on reçoit un ensemble  $I$  d'entiers et un ensemble  $S$  de sommes à éviter, puis on cherche un sous-ensemble  $I' \subseteq I$  de taille maximum tel que toute paire de  $I'$  ne somme pas à un élément de  $S$ . Tous les entiers de  $I$  et  $S$  sont encodés en binaire. En terme de langage, on a: 8 pts

$$\text{NO-BAD-SUM} = \{\langle I, S, k \rangle : \text{il existe } I' \subseteq I \text{ avec } |I'| \geq k \text{ tel que pour tout } i, j \in I', i + j \notin S\}$$

Montrez que NO-BAD-SUM est NP-complet.

*Suggestion:* réduction de IND-SET vers NO-BAD-SUM.

- (b) Dans le problème de l'intersection bornée, on reçoit des ensembles  $A_1, \dots, A_n$  et  $B_1, \dots, B_m$ . On veut savoir s'il existe un ensemble  $X$  tel que  $|X \cap A_i| \geq 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , et  $|X \cap B_i| \leq 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . 8 pts

$$\text{INTER-BORNE} = \{\langle A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \rangle : \exists X (\forall i \in \{1, \dots, n\}, |X \cap A_i| \geq 1 \wedge \forall i \in \{1, \dots, m\}, |X \cap B_i| \leq 1)\}$$

Montrez que INTER-BORNE est NP-complet.

*Suggestion:* réduction de 3-SAT vers INTER-BORNE.

**★ Question 4. (cycles supérieurs)**

Soient  $\text{EXPTIME} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{DTIME}(2^{n^k})$  et  $\text{NEXPTIME} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{NTIME}(2^{n^k})$  les classes des langages décidables en temps exponentiel, respectivement avec une MT déterministe et une MT non-déterministe. 10 pts

Montrez que si  $\text{EXPTIME} \neq \text{NEXPTIME}$ , alors  $\text{P} \neq \text{NP}$ .

*Suggestion:* Prenez un langage  $L$  dans NEXPTIME, puis montrez que  $\{pad(w, f(w)) : w \in L\}$  est dans NP pour un certain  $k$  et une fonction  $f(w)$  appropriée, où  $pad(w, f(w))$  est un mot formé de  $w$  suivi de  $1^{f(w)}$ . Faites ensuite une preuve par contraposition.